



Corso di Laurea in Finanza Aziendale Anno Accademico 2015/16

Probability for Finance (1° anno, 1° semestre, CFU 9)

Docente titolare dell'insegnamento: Prof. A. Damiano Rossello

Sede: Palazzo delle scienze – C.so Italia, 55 - Catania

Telefono: 0957537772; email: rossello@unict.it

Orario ricevimento: martedì, mercoledì ore 8.00 – 9.30

OBIETTIVI FORMATIVI

1. **Conoscenza e capacità di comprensione.** Il corso fornisce le conoscenze base della moderna teoria probabilistica, utile ai fini della modellizzazione dei mercati finanziari. Le principali idee e le più rilevanti tecniche matematiche sono presentate tramite esempi finanziari: pricing di titoli derivati, risk management, asset allocation. Il background matematico è mirato alla preparazione di uno studente di Economia, consentendo un apprendimento flessibile attraverso cui egli può successivamente analizzare le applicazioni a un periodo (es. misure di rischio e performance) e a più periodi sia a tempo discreto che a tempo continuo (es. pricing di derivati in condizioni di non-arbitraggio). Tali applicazioni sono presentate anche attraverso letteratura specialistica ed esempi. Evitando sovrapposizione con altre discipline affini, il percorso formativo coniuga una didattica rivolta all'elaborazione di capacità logico-deduttive e abilità di problem-solving. La verifica dell'apprendimento è eseguita durante tutto lo svolgimento del corso, stimolando un'attiva partecipazione da parte degli studenti.
2. **Capacità di applicare conoscenza e comprensione.** Intrinsecamente la teoria probabilistica si presta – attraverso gli opportuni metodi didattici interattivi sopra richiamati – alla cosiddetta *applying knowledge* del potenziale laureato magistrale, ossia l'impiego in contesti professionali della conoscenza acquisita e la capacità di adattarla a situazioni trasversali, sviluppando una capacità di elaborazione del *know how* in modo originale. E' prevista la discussione in aula di casi reali in modo da stimolare la sintesi e soluzione di problemi in condizioni di incertezza su futuri valori di grandezze economiche (es. opzioni reali, misurazione del rischio di cash flow operativi e finanziari, scelta di investimenti alternativi, ecc.).
3. **Autonomia di giudizio.** Lo studente è chiamato attivamente ad interagire con il docente allo scopo di sviluppare una capacità di giudizio autonomo relativo ai modelli probabilistici trattati a lezione. Il futuro laureato magistrale dovrà essere in grado di riconoscere gli aspetti descrittivi e/o normativi di tali modelli, estrapolarne gli elementi essenziali da sottoporre a verifica e attivare la ricerca e l'uso appropriato di fonti informative tramite il web (articoli su riviste, working papers, studi empirici, banche dati, ecc.).
4. **Abilità comunicative.** Il corso mira a formare soggetti abili nella sintesi tra conoscenza teorica (ipotesi e assiomi dei modelli) e aspetti operativi (applicazioni a problemi finanziari), oltretutto in grado di divulgare il *know how*. L'organizzazione delle lezioni in moduli e attraverso talks somministrati con l'ausilio di presentazioni multimediali favorisce l'interazione docente-studente, in un quadro di continuo aggiornamento critico delle nozioni apprese e dei relativi aspetti operativi. In tal modo lo studente acquisisce un buon controllo dei topics studiati ed è in grado di promuoverne la circolazione e trasmissione a terzi con appropriata capacità di giudizio.
5. **Capacità di apprendimento.** L'insegnamento proposto contiene elementi tipici della matematica applicata, ma che richiedono anche una certa abilità di ragionamento in termini astratti. Per tale motivo, ad ogni studente vengono forniti spunti di riflessione sul miglioramento del metodo di studio tenuto conto delle rispettive individualità. Durante le lezioni sono somministrati esercizi necessari alla verifica dell'apprendimento. Inoltre, è richiesta l'attiva partecipazione alle lezioni mediante verifiche orali di singoli aspetti logico-deduttivi della materia o di quelli operativi. Lo studente è stimolato a partecipare alla revisione delle Lecture Notes predisposte dal docente, strumento di studio principale insieme ai libri di testo consigliati.

PREREQUISITI RICHIESTI

Conoscenza dei principali strumenti di calcolo differenziale e integrale (una e più dimensioni). Nozioni di algebra lineare. Nozioni di calcolo finanziario in condizioni di certezza. Equazioni differenziali (primo ordine, ordinarie) e convergenza di serie di funzioni saranno discussi anche a lezione.

ORGANIZZAZIONE E METODI DIDATTICI

Il corso si basa su circa 60 ore di lezioni frontali durante le quali saranno presentati gli argomenti del programma. Si svolgeranno e discuteranno anche alcuni esercizi che permetteranno allo studente di migliorare la comprensione degli argomenti. L'attività formativa prevede sia attività didattica frontale tradizionale (lezioni ed esercitazioni) con l'ausilio di slides, proiettore PC, impiego del foglio elettronico, sia organizzazione di gruppi di studio e seminari tematici.



FREQUENZA LEZIONI

Obbligatoria

TESTI DI RIFERIMENTO

- Lecture Notes del docente
- *Probability: The Science of Uncertainty (with Applications to Investments, Insurance and Engineering)* – M.A. Bean – American Mathematical Society
- *Essential Mathematics for Market Risk Management* – S. Hubbert – Wiley 2012
- *Probability Models* – J. Haigh – Springer 2004
- *Basic Stochastic Processes* – Z. Brzeziank, T. Zastawniak – Springer 2000
- *Basic Probability Theory* – R.B. Ash – Free Electronic Copy
- *Probability Essentials* – J. Jacod, P. Protter – Springer 2004
- *Elementary Stochastic Calculus (with finance in view)* – T. Mikosch – World Scientific 1998
- *A First Look at Rigorous Probability Theory* – J.S. Rosenthal – World Scientific – 2006
- *An Elementary Introduction to Mathematical Finance: Options and other Topics* – S.M. Ross – Cambridge University Press – 2011
- *Probability for Risk Management* – M.J. Hassett, D.G. Stewart – Actex Publications 2006
- *From Measures to Ito Integrals* – E. Kopp – Cambridge University Press – 2011

Homework: alla fine del primo Modulo, durante il corso delle lezioni. *Tempo di consegna* fissato dal docente in aula

- Studenti che accedono alla prova: frequentanti; fuori corso e ripetenti che non frequentano le lezioni potranno chiedere l'homework al ricevimento e lo consegneranno ad una data fissata dal docente
- Tipo: test a risposta multipla, 8 domande; solo le migliori 4 risposte garantiscono l'attribuzione di punteggio, se *accompagnati dallo svolgimento* dettagliato
- Percentuale sul voto complessivo: 10% = fino a 3/30; gli studenti che non consegnano l'homework non potranno conseguire più di 27/30

Prove in itinere durante il corso

Class Test: a ogni data di appello ufficiale; *prenotazione obbligatoria* entro 3 giorni dalla data prevista

- Studenti che accedono alla prova: tutti
- Tipo: test a risposta multipla, 8 domande; solo le migliori 4 risposte garantiscono l'attribuzione di punteggio; durata test 1h 30m
- Percentuale sul voto complessivo: 30% = fino a 9/30

Eventuali prove di fine corso

Esame Orale: data successiva a quella dell'appello ufficiale, indicata dal docente sul suo link personale nella web page DEI

- Tipo: domande su tutto il programma
- Percentuale sul voto complessivo: 60% = fino a 18/30

PROVA D'ESAME

Date d'esame

<http://www.economia.unict.it/Didattica/Diario-esami>



CONSEGNA MATERIALE DIDATTICO

Lectures Notes, Slides su argomenti di ripasso e copie di Class Tests su STUDIUM:
<http://studium.unict.it/dokeos/2016/>

PROGRAMMA DEL CORSO

1° MODULO (3 CFU)

Titolo del modulo: *Elementi di Teoria delle Probabilità*

Credito parziale attribuito: 3 CFU

Obiettivi formativi: Conoscenza dei principali risultati probabilistici dal punto di vista del calcolo infinitesimale; illustrazione di alcuni concetti base con esempi finanziari.

Descrizione del programma: Spazi di probabilità discreti e generali; probabilità condizionale e indipendenza; variabili casuali (distribuzioni discrete e continue); alcuni modelli di variabili casuali d'impiego frequente in finanza; indici di localizzazione e dispersione; funzioni quantili; valore atteso condizionato (integrazione rispetto a una misura di probabilità).

2° MODULO (3 CFU)

Titolo del modulo: *Modelli multivariati in condizioni d'incertezza statica e dinamica*

Credito parziale attribuito: 3 CFU

Obiettivi formativi: Estensione delle distribuzioni di probabilità a vettori aleatori e processi stocastici, come modelli di fenomeni finanziari in condizioni d'incertezza.

Descrizione del programma: Vettori casuali e distribuzioni congiunte; distribuzioni marginali; processi stocastici e distribuzioni finito dimensionali; alcuni teoremi di convergenza di variabili aleatorie; simulazione di Monte Carlo e metodo della trasformazione inversa; funzione caratteristica e funzione generatrice dei momenti; alcuni processi stocastici utilizzati in finanza: Bernoulli, random walk, Wiener, AR(1), martingala, Markov Chains; elementi di calcolo stocastico (integrale di Itô ed equazioni differenziali stocastiche diffusive).

3° MODULO (3 CFU)

Titolo del modulo: *Modelli stocastici e Finanza*

Credito parziale attribuito: 3 CFU

Obiettivi formativi: Applicazioni di distribuzioni di variabili casuali e processi stocastici alla modellizzazione finanziaria: pricing, risk e performance measurement.

Descrizione del programma: modellizzazione d'invarianti di mercato (log-returns); misure di rischio coerenti e generali (es. Value-at-Risk ed Expected Shortfall); pricing di derivati semplici: approccio binomiale a tempo discreto e approccio a tempo continuo alla Black-Scholes (non-arbitraggio e hedging); ottimizzazione della ricchezza finale: cenni con l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (stochastic dynamic programming) e l'approccio martingala equivalente.

Tutti gli argomenti costituiscono conoscenze necessarie per il superamento dell'esame. Ch = Capitolo

| Argomenti | Testo e/o Lecture Notes |
|---|---|
| 1. Esperimenti aleatori. Eventi. Misura di Probabilità: assiomi e principali proprietà. | Lecture note 1. Jacod-Protter, Ch 1,2; Rosenthal, Ch 2,3; Ash, Ch 1; Haigh, Ch 1 |
| 2. Probabilità condizionale ed Indipendenza. Legge delle probabilità totali e teorema di Bayes. Calcoli di eventi indipendenti. | Lecture note 1. Jacod-Protter, Ch 2,3; Rosenthal, Ch 2,3; Ash, Ch 1; Haigh, Ch 2 |
| 3. Misure di Probabilità discrete: uniforme; schema delle prove di Bernoulli; massa di Dirac. Cenni a esperimenti composti. | Lecture note 2. Jacod-Protter, Ch 4; Ash, Ch 1; Haigh, Ch 3 |
| 4. Misure di Probabilità nell'insieme dei numeri reali (\mathbb{R}): funzioni di distribuzione. Costruzione tramite estensione. Distribuzioni discrete. | Lecture note 3. Jacod-Protter, Ch 6,7,11; Rosenthal, Ch 2; Haigh, Ch 3 |
| 5. Distribuzioni continue e densità. Variabili aleatorie come funzioni misurabili. Distribuzione di variabili aleatorie e misure di probabilità in \mathbb{R} . | Lecture note 3. Jacod-Protter, Ch 5,8,11; Rosenthal, Ch 2,3; Ash, Ch 2; Haigh, Ch 3,4 |
| 6. Misure di Probabilità nello spazio reale euclideo n – dimensionale (\mathbb{R}^n): funzioni di distribuzione congiunta. Operatore differenza. | Lecture note 4. Jacod-Protter, Ch 12; Ash, Ch 2; Haigh, Ch 4 |



| | |
|---|---|
| 7. Vettori aleatori come funzioni misurabili. Sigma-algebra generata da una variabile aleatoria e da un vettore aleatorio. Distribuzione di vettori aleatori. | Lecture note 4. Jacod-Protter, Ch 10,12; Rosenthal, Ch 2,3,6; Ash, Ch 2; Haigh, Ch 3,4; Mikosch Ch 1; Bean Ch 4; Hassett-Stewart Ch 10 |
| 8. Valore atteso di variabili aleatorie semplici. Valore atteso di variabili aleatorie non-negative. Cambio di misura nel valore atteso. | Lecture note 5. Jacod-Protter, Ch 9; Rosenthal, Ch 4; Ash, Ch 3; Haigh, Ch 4 |
| 9. Valore atteso di variabili aleatorie generali (integrale alla Lebesgue). Teorema della convergenza monotona. Teorema di cambio di variabile. | Lecture note 5. Jacod-Protter, Ch 9; Rosenthal, Ch 4,6; Ash, Ch 3; Haigh, Ch 4 |
| 10. Integrale di Stieltjes. Distribuzioni condizionate: tramite un evento; tramite distribuzioni congiunte. | Lecture notes 5 e 6. Jacod-Protter, Ch 12,23; Rosenthal, Ch 13; Ash, Ch 4; Haigh, Ch 4; Bean Ch 4; Mikosch Ch 2 |
| 11. Valore atteso condizionato tramite distribuzioni condizionate. Valore atteso condizionato ad un evento. Valore atteso condizionato generale. | Lecture note 6. Jacod-Protter, Ch 12,23; Rosenthal, Ch 13; Ash, Ch 4; Haigh, Ch 4; Mikosch Ch 1 |
| 12. Lemma sul valore atteso. Disuguaglianze: Jensen; Holder; Minkowski; Cauchy-Schwartz; Chebychev. | Lecture note 7. Jacod-Protter, Ch 23; Rosenthal, Ch 5,13; Ash, Ch 3,4; Haigh, Ch 5,6; Mikosch Appendice A |
| 13. Classi L^p di variabili aleatorie: momenti. Varianza, covarianza (momenti misti). | Lecture note 7. Jacod-Protter, Ch 5,9; Rosenthal, Ch 4,9; Ash, Ch 3; Haigh, Ch 4,5,6; Mikosch Ch 1 |
| 14. Distribuzioni simmetriche. Statistiche riassuntive (skewness; kurtosis; mediana; quantile). Momenti di un vettore aleatorio. Complementi su vettori aleatori. Uguaglianza in distribuzione. | Lecture note 7. Jacod-Protter, Ch 11,12; Hubbert Ch 9,11; Ash, Ch 3; Haigh, Ch 4,5,8; Bean Ch 4; Mikosch Ch 1 |
| 15. Misure prodotto di probabilità. Teorema di Fubini. | Lecture note 7. Jacod-Protter, Ch 10; Rosenthal, Ch 2,9 |
| 16. Introduzione ai processi stocastici. Misurabilità congiunta. Traiettorie. Filtrazione. Tipi di processi. Teorema di esistenza di Kolmogorov. | Lecture note 8. Rosenthal, Ch 7,15; Ash, Ch 6; Haigh, Ch 7,8; Brzeziank-Zastawniak Ch 3,6; Mikosch Ch 1; Hassett-Stewart Ch 12 |
| 17. Fidis e distribuzioni condizionate. Alcuni esempi di processi: white noise; AR(1); random walk; martingala; Markov; Wiener o processo Brownian Motion. | Lecture note 8. Rosenthal, Ch 7,14,15; Ash, Ch 6,7; Haigh, Ch 7,8; Brzeziank-Zastawniak Ch 3,5,6; Mikosch Ch 1; Ross Ch 3; Hubbert Ch 15 |
| 18. Limiti e misurabilità. Convergenza di variabili aleatorie: quasi certa; in distribuzione. | Lecture note 9. Jacod-Protter, Ch 17; Rosenthal, Ch 5; Ash, Ch 3,5,6; Haigh, Ch 6; Mikosch Appendice A |
| 19. Altri tipi di convergenza: in momento n – esimo; in probabilità. Teorema del Limite Centrale e Legge dei grandi numeri. Applicazione: simulazione di Monte Carlo. | Lecture note 9. Jacod-Protter, Ch 20,21; Rosenthal, Ch 5,11; Ash, Ch 3,5,6; Haigh, Ch 6; Mikosch Appendix A; Bean Ch 6; Hubbert Ch 22; Ross Ch 13 |
| 20. Trasformazioni di variabili aleatorie: funzione generatrice dei momenti e funzione caratteristica. | Lecture note 9. Jacod-Protter, Ch 13; Rosenthal, Ch 9,11; Ash, Ch 5; Haigh, Ch 5; Bean Ch 7,8; Hubbert Ch 11; Hassett-Stewart Ch 6,9,11 |
| 21. Trasformazione di densità: caso univariato. | Lecture note 9. Jacod-Protter, Ch 11; Bean Ch 7,8; Ash Ch 2; Hubbert 11; Hassett-Stewart Ch 9 |
| 22. Trasformazione di densità congiunta: caso multivariato. | Lecture note 9. Jacod-Protter, Ch 12; Bean Ch 7,8; Ash Ch 2; Hassett-Stewart Ch 11 |
| 23. Modello log-normale di rendimenti aleatori. Rendimento aleatorio di un portafoglio e Value-at-Risk. Misure coerenti di rischio. Cenni a misure di performance. | Lecture note 10. Mikosch Ch 4; Rosenthal Ch 15; Ross Ch 3; Hubbert Ch 5,9,10,11,13 |
| 24. Modello binomiale per l'evoluzione temporale del prezzo azionario. Random Walk e convergenza al Geometric Brownian Motion. | Lecture note 11. Rosenthal Ch 15; Ross Ch 3; Ash Ch 6; Ross Ch 6; Brzeziank-Zastawniak Ch 3,5; Haigh Ch 7 |
| 25. Catene di Markov e applicazione al credit risk. | Lecture note 12. Brzeziank-Zastawniak Ch 5; Haigh Ch 7,8; Rosenthal Ch 8,15; Hassett-Stewart Ch 12; Ash Ch 7 |
| 26. Processo per il valore nel tempo di un portafoglio di replica. Portafoglio self-financing. Modello diffusivo per il valore: cenni all'integrale di Ito. | Lecture note 13. Brzeziank-Zastawniak Ch 7; Mikosch Ch 3,4; Rosenthal Ch 15; Hubbert Ch 13 |
| 27. Cenni alle equazioni differenziali stocastiche diffusive. Soluzione di un'equazione con coefficienti costanti: Lemma di Ito. | Lecture note 13. Brzeziank-Zastawniak Ch 7; Mikosch Ch 3; Rosenthal Ch 15 |
| 28. Pricing di derivati semplici: principio di valutazione risk-neutral. Formula di Black-Scholes e non-arbitraggio. | Lecture note 13. Mikosch Ch 4; Rosenthal Ch 15; Hubbert Ch 13; Ross Ch 3,7 |
| 29. Ottimizzazione stocastica a tempo discreto e continuo: principio di programmazione dinamica. Alcuni esempi. | Lecture note 14. Ross Ch 11,12 |



Esempi di domande e/o esercizi frequenti

- Cosa è una sigma-algebra?
- Cosa è un evento?
- Cosa è una misura di probabilità? Quali sono le sue principali proprietà?
- Come si definisce una distribuzione di probabilità sulla retta dei numeri reali, oppure sullo spazio reale Euclideo a n dimensioni?
- Come si definisce il valore atteso di una variabile aleatoria generica?
- Che cos'è la convergenza in distribuzione?
- Come si enuncia il Teorema del Limite Centrale?
- Che cos'è un processo stocastico con incrementi indipendenti?
- Come è caratterizzato il modello log-normale per il prezzo di un titolo rischioso?
- Cosa è un integrale di Ito?
- Cosa è una misura (coerente) di rischio?

* Conoscenze minime irrinunciabili per il superamento dell'esame

- Spazio di probabilità
- Proprietà di una misura di probabilità
- Variabili aleatorie (vettori aleatori) come funzioni misurabili e relativi teoremi
- Valore atteso come integrale di Lebesgue e relativi teoremi
- Varianza, covarianza, momenti, indici di localizzazione e dispersione
- Valore atteso condizionato
- Convergenza di variabili aleatorie
- Definizione e classificazione dei processi stocastici